

Zur Zweipunktfunktion in nichtlinearen Spinortheorien

Von H. MITTER

Aus dem Max-Planck-Institut für Physik und Astrophysik, München
(Z. Naturforschg. 15 a, 753—758 [1960]; eingegangen am 31. Mai 1960)

The propagation function of a nonlinear spinor theory with γ_5 -invariance is studied in an approximation which neglects four-point- and higher correlations. The resulting nonlinear differential equation is solved. The only solution fulfilling certain general physical requirements (microcausality, positive energies) corresponds to a "dipole ghost" of zero rest mass.

Die Untersuchung der feldtheoretischen n -Punktfunktionen zerfällt in zwei Teile: Einer hat die Be trachtung jener Eigenschaften zum Gegenstand, die direkt aus der Invarianz der Theorie bei der LORENTZ-Gruppe und verschiedenen Symmetriegruppen, sowie aus der Mikrokausalität folgen (vgl. dazu die Arbeiten von KÄLLEN, WIGHTMAN¹ u. a.). Diese Eigen schaften können unabhängig von einer Diskussion spezieller Wechselwirkungen angegeben werden und führen zu Spektraldarstellungen der n -Punktfunktionen mit zunächst nicht näher bestimmten Spektralfunktionen. Der andere Teil bezieht sich auf das Studium der von der Dynamik abhängigen Eigen schaften (die indirekt durch die Gruppenstruktur beeinflußt sein können, weil diese die Form der möglichen Feldgleichungen einschränken kann), also auf die Gestalt der Spektralfunktionen. Im einfachsten Fall der Zweipunktfunktion führt dies zu Aussagen über das Massenspektrum und Renormierungskon stanten.

Für die Zweipunktfunktion sind die Invarianz- und Mikrokausalitätseigenschaften bekannt (KÄLLEN, LEHMANN²). Für die Spektralfunktionen existieren Ungleichungen, deren Gültigkeit an eine positiv-definite Metrik im Zustandsraum geknüpft ist. Dar über hinaus konnte man — außer im trivialen Fall eines freien Feldes — nur störungstheoretische Aussagen für renormierbare Theorien gewinnen.

HEISENBERG³ versuchte, eine nichtlineare, nicht-renormierbare Spinortheorie zu quantisieren, indem ein enger Zusammenhang zwischen der Zweipunktfunktion und gewissen klassischen Lösungen der Feldgleichung vermutet wurde. Die Zweipunktfunktion hat dann auf dem Lichtkegel — zum Unterschied von der eines freien Feldes — keine δ - und

δ' -funktionsartigen Singularitäten, sondern sollte bei Annäherung an den Lichtkegel mit wachsender Amplitude und Frequenz oszillieren. Dies hat zur Folge, daß die Norm im Zustandsraum nicht mehr positiv definit sein kann. Es treten Zustände mit negativer Norm („Geisterzustände“) auf, deren physikalische Bedeutung im Falle des LEE-Modells im einzelnen analysiert werden konnte, im allgemeineren Falle aber erst geklärt werden muß.

Da nun der Zusammenhang zwischen der Aus breitungsfunktion der quantisierten Theorie und klassischen Lösungen der Ausgangsgleichung zu nächst undurchsichtig ist, wäre es vorteilhaft zu wissen, ob ein solches Quantisierungsverfahren für eine nichtrenormierbare Theorie sinnvoll oder sogar notwendig ist. Es soll daher im folgenden versucht werden, Aussagen über die Zweipunktfunktion zu erhalten, ohne daß besondere Annahmen über die Art der Quantisierung oder die Metrik im Zustandsraum gemacht werden. Die physikalische Struktur der Theorie soll lediglich so beschaffen sein, daß aus der LORENTZ-Invarianz in üblicher Weise eine Spektraldarstellung der Ausbreitungsfunktion er schlossen werden kann.

Da für das vorliegende Problem unter den gegenwärtigen Umständen exakte Methoden nicht zur Verfügung stehen, muß man sich auf Näherungsverfahren beschränken, über deren Güte man keine Auf schlüsse hat. Alle Schlüsse der vorliegenden Arbeit sind daher nur im Rahmen und Konvergenzbereich der gemachten Näherung — neue Tamm-Dancoff-Methode, Beschränkung auf gewisse einfache Graphen, insbesondere Vernachlässigung höherer Korrelationen — sinnvoll und sollten nicht ohne weiteres verallgemeinert werden.

¹ G. KÄLLEN u. A. S. WIGHTMAN, Mat. Fys. Skr. Dan. Vid. Selsk. **1** no. 6 [1958]; G. KÄLLEN u. H. WILHELMSSON, ibid. **1** no. 9 [1959], vgl. auch Anm. ⁵.

² G. KÄLLEN, Helv. Phys. Acta **25**, 417 [1952]. — H. LEHMANN, Nuovo Cim. **11**, 342 [1954]; vgl. auch H. UMEZAWA

u. S. KAMEFUCHI, Progr. Theor. Phys. **6**, 543 [1951].

³ W. HEISENBERG, Z. Naturforschg. **9 a**, 292 [1954]; vgl. auch Anm. ⁵.



Allgemeine Eigenschaften

Wir untersuchen die Zweipunktfunktion

$$\langle 0 | T \psi(x) \bar{\psi}(y) | 0 \rangle = F(z), \quad z = x - y, \quad (1)$$

und nehmen an, daß die Theorie invariant bei TOUSCHEK-Transformationen

$$\psi \rightarrow e^{i \alpha \gamma_5} \psi, \quad \bar{\psi} \rightarrow \bar{\psi} e^{i \alpha \gamma_5} \quad (2a)$$

und der Spiegelung

$$\psi(\xi, t) \rightarrow \gamma_4 \psi(-\xi, t) \quad (2b)$$

ist. Diese Symmetrieannahme dürfte an der prinzipiellen Struktur des Quantisierungsproblems nichts Wesentliches ändern, sie vereinfacht jedoch die Rechnung beträchtlich⁴, denn es tritt der KÄLLEN-LEHMANN-Darstellung der Zweipunktfunktion nur eine Spektralfunktion auf:

$$F(z) = \int_0^\infty \varrho(\zeta) \gamma_r \frac{\partial}{\partial z_r} A_c(z, \zeta) d\zeta. \quad (3)$$

Dabei ist $A_c = i A_+ = -\frac{1}{2} A_F$ die Ausbreitungsfunktion für ein freies BOSE-Teilchen der Masse $\sqrt{\zeta}$. Wegen der Invarianz bei eigentlichen LORENTZ-Transformationen muß

$$F(z) = 2(\gamma z) H(s), \quad s = z_r z_r \quad (4)$$

sein, wobei $H(s)$ auch noch vom Vorzeichen von z_r abhängen kann (also im Vor- und Nachkegel verschieden sein kann).

Man sieht, daß

$$\begin{aligned} H(s) &= \int_0^\infty \varrho(\zeta) \frac{d}{ds} A_c(s, \zeta) d\zeta \\ &= \int_0^\infty \varrho(\zeta) \frac{d}{ds} \left(-\frac{1}{2} A^{(1)}(s) + i A(s) \right) d\zeta \end{aligned} \quad (5)$$

ist. Würde man, wie in einer früheren Arbeit⁵, auch noch Invarianz bei PAULI-GÜRSEY-Transformationen fordern, so erhielte man keine weitere Einschränkung des Ansatzes (4).

Außer diesen einfachen Folgerungen aus der LORENTZ- und TOUSCHEK-Invarianz sind aber noch

⁴ In der hier verwendeten Näherung ist die Rechnung für ein Spinorfeld mit diesen Symmetrien einfacher als für ein skalares Feld, da Ableitungen niedrigerer Ordnung auftreten und die Verhältnisse hinsichtlich der DIRAC-Algebra einfach sind.

⁵ H.-P. DÜRR et al., Z. Naturforschg. **14a**, 441 [1959].

⁶ A. S. WIGHTMAN, Phys. Rev. **101**, 860 [1956].

zwei wichtige physikalische Forderungen zu erfüllen, die das Verhalten von H für komplexe Argumente beeinflussen. Die erste ist die Mikrokausalitätsforderung

$$\{\psi(x), \bar{\psi}(y)\} = 0 \quad \text{für } z^2 > 0. \quad (6)$$

Da der Vakuumerwartungswert des Antikommators ebenso wie der des zeitgeordneten Produktes mit Hilfe der Spektralfunktion ϱ dargestellt werden kann, wobei an Stelle von A_c die Funktion A auftritt ($A = -\frac{1}{2} \varepsilon(z) A_F$), bedeutet die Forderung (6) einfach

$$(I) \quad \Im H(s) = 0 \quad \text{für } s > 0.$$

Eine zweite wichtige Forderung ist die nach positiven Eigenwerten des Operators der Gesamtenergie. WIGHTMAN⁶ hat gezeigt, daß dies Analytizitätseigenschaften der n -Punktfunktionen zur Folge hat. Für die hier betrachtete Zweipunktfunktion bedeutet diese Forderung

(II) $H(s)$ muß in der ganzen komplexen s -Ebene mit Ausnahme der negativen reellen Achse und des Ursprunges analytisch sein.

Aus der Symmetrie von A_c bei Zeitspiegelung folgt die entsprechende Eigenschaft von H , die später von Bedeutung sein wird:

$$(III) \quad H(z_4, \beta) = H(-z_4, \beta).$$

Genäherte Berechnung von H

Nun soll für eine spezielle Theorie eine genäherte Berechnung von H versucht werden. Wir betrachten die Gleichung

$$\gamma_\mu \frac{\partial}{\partial x_\mu} \psi(x) + l^2 \gamma_5 \gamma_r : \psi(x) (\bar{\psi}(x) \gamma_5 \gamma_r \psi(x)) : + l'^2 \gamma_2 : \psi(x) (\bar{\psi}(x) \gamma_2 \psi(x)) : = 0. \quad (7)$$

Sie stellt den einfachsten Fall einer nichtlinearen Spinortheorie mit den geforderten Symmetrien dar und enthält für $l' = 0$ die von HEISENBERG u. a.⁵ studierte Gleichung. In (7) bedeutet $: \ : :$ das WICKSche Operatorprodukt⁷.

Wir bilden zunächst den Ausdruck

$$\gamma_r \frac{\partial}{\partial x_\mu} \frac{\partial}{\partial y_\mu} F(x-y) \gamma_\mu = -8(\gamma z) [s H'' + 3 H']$$

⁷ Das WICK-Produkt soll dabei durch die übliche Regel (nur Paarkontraktionen) definiert sein. Dann verschwindet der Vakuumerwartungswert des WICK-Produktes von zwei Operatoren automatisch. Es wären auch andere Definitionen für $: \ : :$ möglich, doch würden sich die Unterschiede erst in höheren Näherungen bemerkbar machen.

und finden aus der Definition von F bei Beachtung der Tatsache, daß das T -Produkt für gleiche Zeiten eine Sprungstelle hat, mit Hilfe der aus der Spektraldarstellung folgenden Beziehung

$$\langle 0 | \{ \psi(x), \bar{\psi}(y) \} | 0 \rangle |_{x_4=y_4} = \gamma_4 \delta_3(\xi - \eta) \int_0^\infty \varrho(\zeta) d\zeta \quad (8)$$

die Gleichung

$$\begin{aligned} \gamma_\nu \frac{\partial}{\partial x_\nu} \frac{\partial}{\partial y_\mu} F(x-y) \gamma_\mu &= \langle 0 | T \left(\gamma_\nu \frac{\partial}{\partial x_\nu} \psi(x), \frac{\partial \bar{\psi}(y)}{\partial y_\mu} \gamma_\mu \right) | 0 \rangle \\ &= -i \gamma_\mu \frac{\partial}{\partial z_\mu} \delta(z) \int_0^\infty \varrho(\zeta) d\zeta \\ &\quad + \gamma_4 \delta(x_4 - y_4) \langle 0 | \left\{ \gamma_\nu \frac{\partial}{\partial x_\nu} \psi(x), \bar{\psi}(y) \right\} | 0 \rangle. \end{aligned} \quad (9)$$

Wenn aus der Differentialgleichung (7) eingesetzt wird, verschwindet der letzte Ausdruck, wie mit Hilfe von elementaren Eigenschaften des Wick-Produktes gezeigt werden kann. Im ersten Ausdruck formen wir das T -Produkt in Wick-Produkte um und vernachlässigen alle Glieder mit weniger als drei Kontraktionen. Dann erhalten wir die Beziehung

$$\begin{aligned} \gamma_\nu \frac{\partial}{\partial x_\nu} \frac{\partial}{\partial y_\mu} F(x-y) \gamma_\mu &= (l^2 + l'^2)^2 \gamma_\nu F(z) \gamma_\mu F(-z) \gamma_\nu F(z) \gamma_\mu \\ &\quad - (l^4 + l'^4) \gamma_\nu F(z) \gamma_\mu \text{Sp} F(-z) \gamma_\nu F(z) \gamma_\mu \\ &\quad - i \gamma_\mu \frac{\partial}{\partial z_\mu} \delta(z) \int_0^\infty \varrho(\zeta) d\zeta. \end{aligned} \quad (10)$$

Gehen wir mit dem Ansatz (3) in diese Gleichung ein, so erhalten wir nach einiger Rechnung

$$\begin{aligned} (\gamma z) [s H'' + 3 H' + \lambda s H^3] &= -\frac{i}{8} \gamma_\mu \frac{\partial}{\partial z_\mu} \delta(z) \int_0^\infty \varrho(\zeta) d\zeta \end{aligned} \quad (11)$$

mit $\lambda = 24(l^4 + l'^4) + 16l^2l'^2$.

Im linearen Fall $\lambda = 0$ löst die Ausbreitungsfunktion eines Neutrinos

$$F_0(z) = A \gamma_\nu \frac{\partial}{\partial z_\nu} D_c(z) \quad (12)$$

die Gleichung. Für diese ist $\varrho(\zeta) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \delta(\zeta - \varepsilon)$ und $\int_0^\infty \varrho(\zeta) d\zeta = A$ (s. Anm.⁸). Die Lösung ist

durch (11) nur bis auf eine Konstante A bestimmt. Diese kann (z.B. durch die übliche kanonische Quantisierungsforderung) auf 1 normiert werden. Eine Störungsentwicklung für kleine λ führt zu divergenten Resultaten.

Wir suchen nun Lösungen für $\lambda \neq 0$ und betrachten zunächst solche für $z \neq 0$. Dann braucht nur die homogene Gleichung

$$s H'' + 3 H' + \lambda s H^3 = 0 \quad (13)$$

betrachtet zu werden. Wie man sofort sieht, lautet eine spezielle Lösung

$$H = 1/\sqrt{\lambda} s. \quad (14)$$

Es wird sich herausstellen, daß dies die einzige physikalisch zulässige Lösung ist. Um dies zu zeigen, suchen wir die allgemeinste Lösung von (13). Mit der neuen Variablen τ , die wir durch

$$s = s_0 e^{-\tau} \quad (15)$$

einführen (dabei sei s_0 eine raumartige Anfangsstelle), und dem Ansatz

$$H = \frac{1}{\sqrt{\lambda} s} g(\tau) \quad (16)$$

finden wir die Differentialgleichung

$$\ddot{g} - g(1 - g^2) = 0. \quad (17)$$

Man sieht an dieser Stelle, daß eine Änderung von λ durch eine Änderung des Längenmaßstabes für s und s_0 kompensiert werden kann, denn τ bleibt dabei invariant und in (17) tritt λ nicht mehr auf. Nach Multiplikation mit g kann eine Integration ausgeführt werden. Die verbleibende Differentialgleichung erster Ordnung kann durch Trennung der Variablen gelöst werden. Man erhält

$$\tau = \int_{g_0}^g \frac{dg}{\sqrt{-C + g^2 - \frac{1}{2} g^4}}, \quad (18)$$

wobei C eine reelle Konstante ist, die Randbedingungen enthält:

$$C = g^2(0) - \frac{1}{2} g^4(0) - \dot{g}^2(0). \quad (19)$$

Als Umkehrfunktion des elliptischen Integrals (18) ist g eine elliptische Funktion von τ , deren Verhalten im Komplexen wesentlich von C [genauer gesagt, von der Lage der Nullstellen des im Nenner von (18) stehenden Polynoms] abhängt. Sie kann für alle Werte von C geschlossen durch die WEIERSTRASS-sche p -Funktion dargestellt werden. Für die folgende Diskussion ist jedoch die Darstellung durch die

JACOBISchen Funktionen zweckmäßiger. Für diese muß zwischen den drei Fällen:

$$\text{a) } C < 0, \quad \text{b) } 0 < C < \frac{1}{2}, \quad \text{c) } C > \frac{1}{2}$$

unterschieden werden.

Im Fall c) kann (I) – reelle g für reelle τ – nicht erfüllt werden, denn τ ist in diesem Fall stets komplex, wie aus (18) gesehen werden kann. Dieser Fall scheidet daher aus. In den anderen Fällen ist g eine JACOBISCHE Funktion, und zwar

$$\text{a) } g = A_1 \operatorname{cn}(A_2 \tau + A_3), \quad (20 \text{ a})$$

$$\text{b) } g = B_1 \operatorname{dn}(B_2 \tau + B_3). \quad (20 \text{ b})$$

Dabei sind A_i und B_i reelle Konstanten, die durch C ausdrückbar sind. Beide Lösungen erfüllen (I). Der Imaginärteil beider Funktionen oszilliert bei Annäherung an den Lichtkegel mit wachsender Frequenz, die zugehörige Vertauschungsfunktion zeigt also qualitativ das von HEISENBERG³ erwartete Verhalten.

Wir betrachten nun das Verhalten in der komplexen s -Ebene. Diese wird durch (15) auf einen Streifen der komplexen τ -Ebene abgebildet. Die s -Ebene muß entlang der negativen reellen Achse aufgeschnitten werden, damit die Abbildung eindeutig wird. Die beiden Ufer entsprechen den Werten $z_0 > |\beta|$ und $z_0 < -|\beta|$. Sie gehen in die Geraden $\Im \tau = \pm \pi$ über.

Die JACOBISchen Funktionen sind doppeltperiodische Funktionen ihres Arguments und hängen außerdem von einem Parameter k ab, der durch C bestimmt ist. Er variiert im Fall a) zwischen 0 und $1/\sqrt{2}$ und im Fall b) zwischen 0 und 1. In beiden Fällen ist eine Periode der JACOBI-Funktionen reell und eine rein imaginär. Da die Funktionen für gewisse komplexe Argumente unendlich werden, kann die Analytizitätsforderung (II) nur erfüllt werden, wenn diese singulären Punkte entweder außerhalb des Streifens $\Im \tau = \pm \pi$ oder auf dessen Begrenzung liegen (im letzteren Fall hätte man unendlich viele Pole auf der negativen reellen s -Achse, die sich bei $s=0$ häufen). Eine Abschätzung der imaginären Periode (vgl. Anhang) zeigt, daß dies im Fall a) nicht realisiert werden kann, wohl aber im Fall b), wenn C genügend nahe bei $\frac{1}{2}$ gewählt wird.

⁸ Der Limes ist nach der Integration über ζ auszuführen.

⁹ Da das Produkt zweier Distributionen am selben Ort nicht definiert ist, hat der in (13) auftretende Ausdruck H^3 nur einen Sinn, wenn er als $\lim_{\delta \rightarrow 0} 1/(s+i\delta)^3$ verstanden wird. Dann löst (24) die Dgl. (13) auch in der Nähe von $s=0$:

Für $C = \frac{1}{2}$ entartet die JACOBISCHE Funktion und man erhält die Lösung (14).

Obwohl im Fall b) sowohl (I) als auch (II) erfüllt werden kann, ist die Lösung für $C \neq \frac{1}{2}$ physikalisch nicht zulässig. Für zeitartige s ist τ auf dem physikalischen Blatt zweideutig $\Im \tau = \pm \pi$. Die beiden Vorzeichen entsprechen denen von z_0 . Wie man nun aus der FOURIER-Reihe

$$H = \frac{A}{s} [1 + R(s)],$$

$$R(s) = 4 \sum_{n=1}^{\infty} D_n \cos(n D_0 \ln s/s_1)$$

(die D_n sind reell) sieht, wechselt $\Im H$ bei Zeitspiegelung $z_0 \rightarrow -z_0$ das Vorzeichen und das widerspricht (III). Damit ist gezeigt, daß nur (14) als Lösung in Frage kommt.

Spektralfunktion, Verhalten im Nullpunkt

Nun untersuchen wir die Lösung (14) in der Nähe von $s=0$. Das Verhalten in diesem singulären Punkt muß so beschaffen sein, daß (14) auch wirklich eine Ausbreitungsfunktion darstellt, wie dies durch (5) gefordert wird. Bildet man den Realteil von (5) und setzt (14) ein, so sieht man, daß die Spektralfunktion durch

$$\varrho(\zeta) = \frac{16\pi^2}{V\lambda} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \delta'(\zeta - \varepsilon) \quad (21)$$

gegeben ist⁸. Für diese Funktion gilt

$$\int_0^\infty \varrho(\zeta) d\zeta = 0, \quad (22)$$

so daß also die Gl. (11) durch (14) auch für $z=0$ gelöst wird, wenn das Verhalten in der Nähe von $s=0$ richtig ist. Bilden wir den Imaginärteil von (5) und setzen (21) ein, so sehen wir

$$\Im H = \frac{-\pi \delta(s)}{V\lambda}, \quad (23)$$

so daß wir also $H(s)$ als

$$H(s) = \frac{1}{V\lambda} \left[\frac{1}{s} - i\pi \delta(s) \right] = \frac{1}{V\lambda} \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{1}{s+i\delta} \quad (24)$$

aufzufassen haben⁹. Damit ist das Verhalten im

Multipliziert man den Differentialausdruck (13) mit einer analytischen Funktion und integriert über einen Kreis um den Nullpunkt, so erhält man mit Hilfe der CAUCHYSchen Integralformel im Limes $\delta \rightarrow 0$ Null.

Nullpunkt festgelegt. Insgesamt ist die Ausbreitungsfunktion in der betrachteten Näherung gegeben durch

$$\begin{aligned} F(z) &= \frac{1}{\sqrt{6}(l^4+l'^4)+4l^2l'^2} \frac{(\gamma z)}{z^2+i\delta} \quad (25) \\ &= \frac{1}{2\sqrt{6}(l^4+l'^4)+4l^2l'^2} \gamma_\nu \frac{\partial}{\partial z_\nu} (\ln z^2). \end{aligned}$$

Diskussion

Die Ausbreitungsfunktion $F(z)$ erfüllt in dieser Näherung eine nichtlineare Differentialgleichung, die der Struktur nach gewisse Ähnlichkeiten mit der Ausgangsgleichung (7) hat. Die Lösung (25) und die zugehörige Vertauschungsfunktion ist auf dem Lichtkegel weniger singulär als die des zugehörigen freien Feldes (12), denn sie enthält keinen Anteil $\delta'(s)$. Sie ist aber nicht ganz frei von δ -artigen Singularitäten. Ein oszillatorisches Verhalten tritt nicht auf. Die zugehörige Spektralfunktion entspricht einem „Geisterdipol“ (einer Kombination von zwei Zuständen zur selben Masse mit entgegengesetzter Norm) bei der Masse Null. Dieses Resultat unterscheidet sich von dem in einer früheren Arbeit⁵ als Approximation angenommenen Verhalten nur dadurch, daß in der hier betrachteten Näherung kein Pol bei einer endlichen Masse auftritt.

In höheren Näherungen [die zustande kommen, indem man die mit GREEN-Funktionen zur Masse Null integrierte Gl. (7) öfter anwendet, kontrahiert und alle höheren Korrelationen vernachlässigt] treten Integrodifferentialgleichungen an Stelle der Differentialgleichung (11), in denen höhere Potenzen von F auftreten. Dies läßt vermuten, daß man dann noch weniger singuläre Lösungen als (24) zu erwarten hätte, wenn das Näherungsverfahren überhaupt sinnvoll ist, weil sonst die auftretenden Integrale nicht konvergieren würden. Damit wären auch Beiträge bei endlicher Masse möglich (vgl. z. B. die „stark regularisierte“ Funktion aus Anm.⁵, für die alle Impulsintegrale konvergieren). Ob diese Vermutung richtig ist, könnte nur durch eine Untersuchung der höheren Näherungen geklärt werden, die aber auf beträchtliche analytische Schwierigkeiten stößt.

Herrn Professor Dr. W. HEISENBERG möchte ich für zahlreiche fördernde Diskussionen herzlich danken.

Anhang

Diskussion der Lösungen der Dgl. (17). Sei

$$Q = -C + g^2 - \frac{1}{2}g^4 = \frac{1}{2}(\alpha_1 - g^2)(g^2 - \alpha_2),$$

dann ist

$$\alpha_{1,2} = 1 \pm \sqrt{1 - 2C}.$$

Die Umkehrfunktion des elliptischen Integrals

$$\tau = \int_{g_0}^{g_1} \frac{dg}{\sqrt{VQ}}$$

ist dann je nach der Lage der Nullstellen von Q in verschiedener Weise durch JACOBI-sche Funktionen auszudrücken¹⁰:

a) Für $C < 0$ ist

$$g = -\sqrt{\alpha_1} \operatorname{cn}\left(\frac{\sqrt{\alpha_1 - \alpha_2}}{\sqrt{2}} \tau + F(\Phi_0, k)\right).$$

Dabei ist $F(\Phi_0, k)$ das elliptische Normalintegral erster Gattung. Φ_0 ist durch $g(0) = -\sqrt{\alpha_1} \cos \Phi_0 = g_0$ bestimmt. Der Modul k ist gleichzeitig der Parameter der JACOBI-Funktion. Er ist durch

$$k^2 = \alpha_1 / (\alpha_1 - \alpha_2)$$

gegeben und variiert zwischen $1/\sqrt{2}$ (für $C = 0$) und 1 (für $C = -\infty$). Die Perioden der JACOBI-Funktion sind durch das vollständige elliptische Normalintegral erster Gattung bestimmt, und zwar ist die reelle Periode $4K(k)$ und die imaginäre Periode $2iK(\sqrt{1-k^2}) = 2iK'$. Die Singularitäten liegen auf der Geraden

$$\Im \left[\sqrt{\frac{1}{2}(\alpha_1 - \alpha_2)} \tau \right] = iK',$$

und zwar in den Punkten

$$\Re \left[\sqrt{\frac{1}{2}(\alpha_1 - \alpha_2)} \tau \right] = 0, 2K, 4K, \dots.$$

Wir zeigen nun, daß die Gerade $\Im \tau = \pi$ stets oberhalb dieser Geraden liegt: K' nimmt von $k=1$ bis $k=1/\sqrt{2}$ monoton zu. Mit Hilfe einer Ungleichung für K' (BATEMAN¹⁰, S. 318) sieht man

$$\begin{aligned} K' &\leq \frac{\pi}{2} - \ln k \leq \frac{\pi}{2} + \frac{\ln 2}{2} < \pi \leq \frac{\pi}{\sqrt{k^2 - 1}} \\ &= \pi \sqrt{\frac{\alpha_1 - \alpha_2}{2}} \end{aligned}$$

Die Singularitäten der JACOBI-Funktion liegen daher stets innerhalb des physikalischen Gebietes.

b) $1 > 2C > 0$. In diesem Falle ist

$$g = \sqrt{\alpha_1} \operatorname{dn}\left(\sqrt{\frac{\alpha_1}{2}} \tau + F(\Phi_0, k)\right)$$

wobei aber jetzt $k^2 = (\alpha_1 - \alpha_2)/\alpha_1$ zwischen 0 (für $2C = 1$) und 1 (für $C = 0$) variiert. Die Perioden der elliptischen Funktion sind $2K$ und $4iK'$. Für $k=0$ ist K' logarithmisch divergent und daher sicher größer als $\sqrt{\frac{1}{2}\alpha_1}\pi$. Für $k=1$ ist $K' = \pi/2$ und daher kleiner als $\sqrt{\frac{1}{2}\alpha_1}\pi = \pi$. Die Forderung (II) ist daher nicht stets erfüllt, sondern

¹⁰ H. BATEMAN, Higher Transcendental Functions II, McGraw-Hill 1953, Kap. XIII.

nur für $K' \geq \frac{\pi\sqrt{\alpha_1}}{V^2}$. Diese Bedingung ist für C nahe bei 1/2 erfüllt.

Eine FOURIER-Reihe für H lautet (BATEMAN¹⁰, S. 345)

$$H(s) = \sqrt{\frac{\alpha_1}{\lambda}} \frac{2\pi}{Ks} \left[\frac{1}{4} + \sum_{n=1}^{\infty} D_n \cos\left(\frac{n\pi}{K} \sqrt{\frac{\alpha_1}{2}} \ln \frac{s}{s_1}\right) \right]$$

$$\text{mit } D_n = \frac{e^{-\pi n K'/K}}{1 - e^{-2\pi n K'/K}}$$

$$\text{und } \sqrt{\frac{\alpha_1}{2}} \tau + F(\Phi_0, k) = \sqrt{\frac{\alpha_1}{2}} \ln \frac{s}{s_1}.$$

Die Reihe konvergiert für C nahe bei 1/2 sehr rasch.

Nichtlineare Elastizitätstheorie geradliniger Versetzungen

Von HANS PFLEIDERER, ALFRED SEEGER und EKKEHART KRÖNER

Aus dem Max-Planck-Institut für Metallforschung, Stuttgart,
und dem Institut für theoretische und angewandte Physik der Technischen Hochschule, Stuttgart
(Z. Naturforschg. 15 a, 758—772 [1960]; eingegangen am 29. März 1960)

Die Spannungsfunktionsmethode zur Lösung von Eigenspannungszuständen wird, ausgehend von der RIEMANN-CARTANSCHEN Versetzungsgeometrie, in allgemeiner Form entwickelt. Die praktische Berechnung ebener Eigenspannungszustände in einem isotropen Medium im Rahmen der Elastizitätstheorie zweiter Ordnung wird im einzelnen dargestellt. Einfache Verhältnisse ergeben sich für kontinuierliche Verteilungen gerader paralleler Schrauben- oder Stufenversetzungen. Mit den dafür erhaltenen Formeln werden in quadratischer Näherung die Spannungsfelder singulärer Schrauben- und Stufenversetzungen berechnet, die in der Mittelachse hohler Kreiszylinder mit spannungsfreien Rändern liegen. Als Nebenergebnis erhalten wir die bekannte ZENERSCHE Formel für die mittlere Volumenaufweitung bei Eigenspannungen aus der quadratischen Elastizitätstheorie.

In einer vorangehenden Arbeit¹ ist dargelegt worden, welche Vorteile die *nichtlineare* Elastizitätstheorie für die Behandlung von Fehlstellen in Kristallen bietet und welche der linearen Elastizitätstheorie überhaupt nicht zugänglichen Probleme damit lösbar werden. Wie bei der linearen Elastizitätstheorie gibt es auch bei der nichtlinearen Theorie zwei zueinander komplementäre Rechenmethoden: Erstens lassen sich *Verschiebungen* einführen und so die Kompatibilitätsbedingungen identisch erfüllen. Die zu lösenden Gleichungen sind dann die in den Verschiebungen ausgedrückten *Gleichgewichtsbedingungen*. Zweitens kann man die Gleichgewichtsbedingungen durch einen Spannungsfunktionsansatz befriedigen, was allerdings nur möglich ist, wenn keine Massenkräfte ohne Potential und keine Trägheitskräfte zu berücksichtigen sind. Die Differentialgleichungen des Problems, denen die *Spannungsfunktionen* genügen müssen, sind dann die *Kompatibilitätsbedingungen* oder, bei Eigenspannungen, deren Verallgemeinerung.

Die uns in der Physik der Gitterfehler interessierenden Probleme sind so beschaffen, daß je nach Fragestellung einer der oben bezeichneten beiden

Wege günstiger als der andere oder nur allein gangbar ist. Will man beispielsweise die Streuung elastischer Wellen an Fehlstellen, etwa Versetzungen, behandeln, so ist wegen der Trägheitsglieder das Rechnen mit Verschiebungen — jedenfalls bis jetzt — unvermeidlich. Bei statischen Eigenspannungsproblemen dagegen ist, wie auch schon in der linearen Theorie², die Benützung von Spannungsfunktionen sehr zweckmäßig. Dieses Verfahren ist sogar unentbehrlich, wenn kontinuierlich verteilte Versetzungen, die ja die elementaren Eigenspannungsquellen sind, behandelt werden sollen.

Die Grundlagen für die *Verschiebungsmethode* hat MURNAGHAN³ ausgearbeitet. In sog. quadratischer Näherung ist damit ein verhältnismäßig einfaches Versetzungs-Randwertproblem, nämlich eine Schraubenversetzung in einem Hohlzylinder, gelöst worden⁴. Die Anwendung dieser Methode auf die Streuung elastischer Wellen an Fehlstellen, die sich besonders im Hinblick auf Probleme der Wärmeleitung durch Gitterschwingungen als sehr fruchtbar erwiesen hat, wird an anderer Stelle gegeben werden. Je nach Zweckmäßigkeit lassen sich die Verschiebungen als Funktionen des unverformten Anfangs- oder

¹ A. SEEGER u. E. MANN, Z. Naturforschg. 14 a, 154 [1959].

² E. KRÖNER, Kontinuumstheorie der Versetzungen und Eigenspannungen, Springer-Verlag, Berlin-Göttingen-Heidelberg 1958.

³ F. D. MURNAGHAN, Finite Deformation of an Elastic Solid, J. Wiley & Sons, New York 1951.